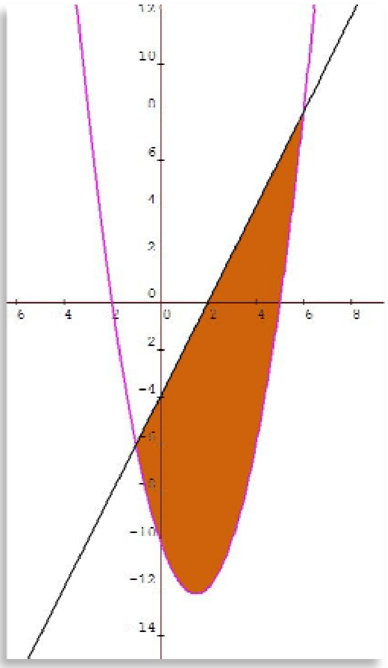
INTEGRAL MUGATUAL – AZALERAK

Ejercicio 3. (Puntuación máxima: 2 puntos)

Calcular el área del recinto limitado por las curvas $y = x^2 - 3x - 10$, $y = 2x - 4$.

Representamos las funciones para visualizar el área pedida



Calculamos los puntos de corte entre las curvas

$$\begin{cases} y = x^2 - 3x - 10 \\ y = 2x - 4 \end{cases} \Rightarrow x^2 - 3x - 10 = 2x - 4 \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 6 \end{cases}$$

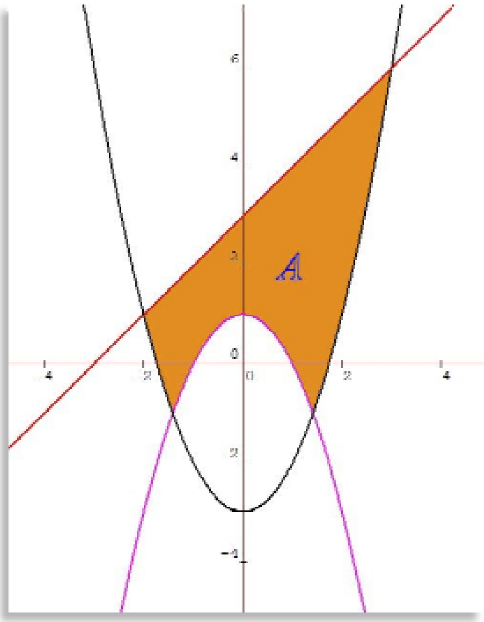
$$A = \int_{-1}^{6} \left[(2x-4) - \left(x^2 - 3x - 10\right) \right] dx = \int_{-1}^{6} \left(-x^2 + 5x + 6\right) dx =$$

$$= \left[\frac{-x^3}{3} + \frac{5x^2}{2} + 6x \right]_{-1}^{6} == \left[\left(\frac{-216}{3} + \frac{180}{2} + 36 \right) - \left(\frac{1}{3} + \frac{5}{2} - 6 \right) \right] =$$

$$= 60 - \frac{1}{3} - \frac{5}{2} = \frac{343}{6}$$

Ejercicio 1. (Puntuación máxima: 2 puntos)

Determina el área del recinto plano limitado por las gráficas de las ***tres funciones*** siguientes:
$y = 1 - x^2$, $y = x^2 - 3$, $y = x + 3$.



Representamos las funciones para tener una idea clara de la región de la que debemos calcular el área.

Calculamos los puntos de corte entre las curvas:

$$\begin{cases} y = 1 - x^2 \\ y = x^2 - 3 \end{cases} \Rightarrow x^2 - 3 = 1 - x^2 \Rightarrow 2x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\begin{cases} y = x + 3 \\ y = x^2 - 3 \end{cases} \Rightarrow x^2 - 3 = x + 3 \Rightarrow x^2 - x - 6 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = -2 \end{cases}$$

entonces el área pedida es:

$$A = \int_{-2}^{-1/\sqrt{2}} \left[(x+3) - (x^2 - 3) \right] dx + \int_{-1/\sqrt{2}}^{1/\sqrt{2}} \left[(x+3) - (1 - x^2) \right] dx + \int_{1/\sqrt{2}}^{3} \left[(x+3) - (x^2 - 3) \right] dx =$$

$$= \int_{-2}^{-1/\sqrt{2}} (-x^2 + x + 6)\, dx + \int_{-1/\sqrt{2}}^{1/\sqrt{2}} (x^2 + x + 2)\, dx + \int_{1/\sqrt{2}}^{3} (-x^2 + x + 6)\, dx =$$

$$= \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 6x \right]_{-2}^{-1/\sqrt{2}} + \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x \right]_{-1/\sqrt{2}}^{1/\sqrt{2}} + \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 6x \right]_{1/\sqrt{2}}^{3} = \frac{125 - 22\sqrt{2}}{6}$$

Ejercicio 2. (Puntuación máxima: 3 puntos)

Esbozar la gráfica de $f(x)=\dfrac{x}{x^2-1}$ y calcular el área de la región limitada por la curva $y=f(x)$, el eje OX y las rectas $x=-\dfrac{1}{2}$, $x=\dfrac{1}{2}$.

<u>Solución:</u>

$f(x)=\dfrac{x}{x^2-1}$

$Domf=(-\infty,-1)\cup(-1,1)\cup(1,\infty)$

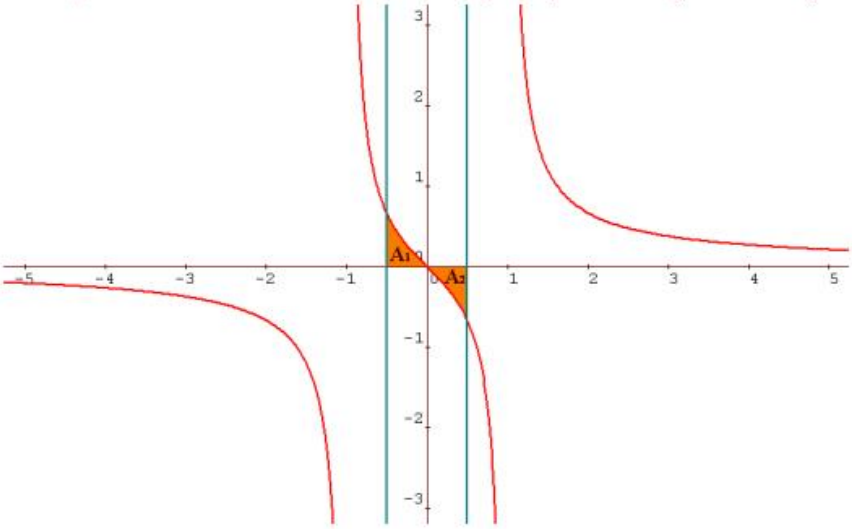
Cortes con los ejes. OX, OY *en* $(0,0)$

$f(x)$ *es simétrica con respecto al origen de coordenadas, función impar.*

Asíntotas verticales : $x=-1$, $x=1$. *Asíntota horizontal* $x=0$

$y'=\dfrac{-1-x^2}{(x^2-1)^2}$, $y''=\dfrac{2x^3+6x}{(x^2-1)^3}$

No hay máximos ni mínimos. En $x=0$ *hay un punto de inflexión. La función es siempre decreciente.*



$A_1=A_2 \Rightarrow A=2A_1$

$$A=2\int_{-1/2}^{0}\frac{x}{x^2-1}dx=\int_{-1/2}^{0}\frac{2x}{x^2-1}dx=\left[\ln\left|x^2-1\right|\right]_{-1/2}^{0}=0-\ln\frac{3}{4}=-(\ln 3-\ln 4)=\ln 4-\ln 3=\ln\frac{4}{3}$$

Ejercicio 3. (Puntuación máxima: 3 puntos)

Esbozar la gráfica de $f(x)=(x^2-x)e^x$ y calcular el área de la región limitada por la curva $y=f(x)$ y el eje OX.

Solución:

$f(x)=(x^2-x)e^x$

$Domf=\mathbb{R}$

Cortes con los ejes $\Rightarrow OX:(0,0)$ y $(1,0)$; $OY:(0,0)$

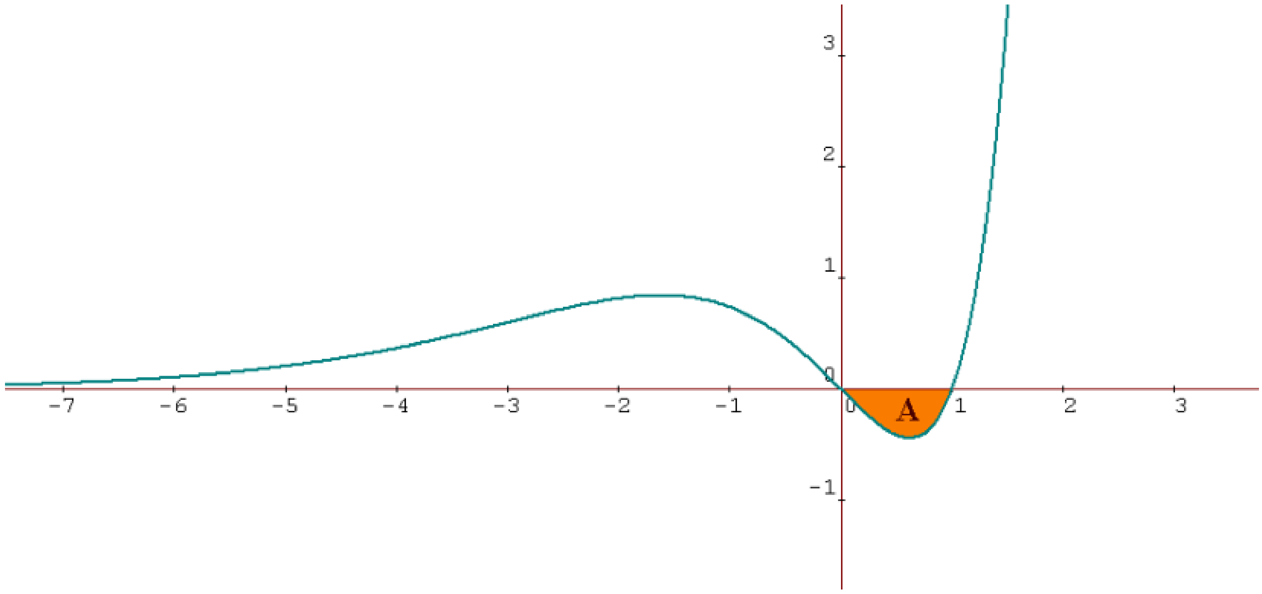
No es simétrica.

$y=0$ es asíntota horizontal cuando $x\to-\infty$

$y'=(x^2+x-1)e^x$; $y''=(x^2+3x)e^x$

En $x=\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$ hay un máximo, en $x=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ hay un mínimo, en $x=0$ y en $x=-3$ hay puntos de inflexión.

$f(x)$ es creciente en $\left(-\infty,\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)\cup\left(\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2},\infty\right)$. $f(x)$ es decreciente en $\left(\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2},\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)$



$$A=-\int_0^1(x^2-x)e^x dx=-\left[(x^2-3x+3)e^x\right]_0^1=-[e-3]=e-3$$

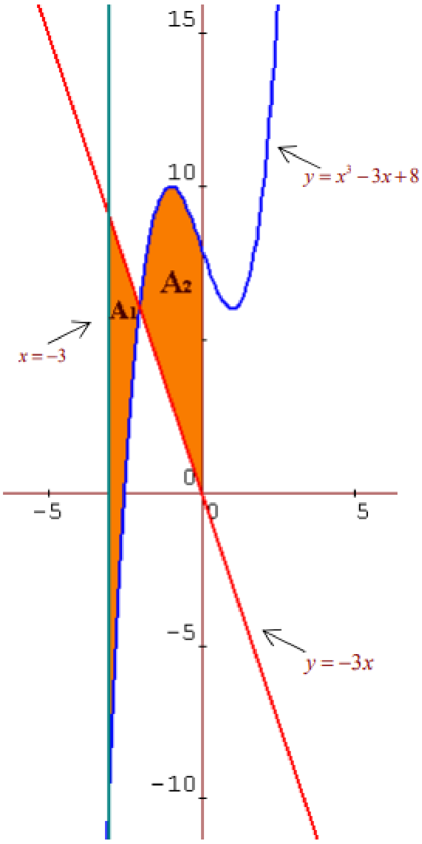
$$\int(x^2-x)e^x dx=(x^2-x)e^x-\int(2x-1)e^x dx=(x^2-x)e^x-\left[(2x-1)e^x-\int 2e^x dx\right]=(x^2-x)e^x-(2x-1)e^x+2e^x=(x^2-3x+3)e^x$$

$$\left\{\begin{array}{l} u=x^2-x,\ du=(2x-1)dx \\ dv=e^x dx,\ v=e^x \end{array}\right\},\ \left\{\begin{array}{l} u=2x-1,\ du=2dx \\ dv=e^x dx,\ v=e^x \end{array}\right\}$$

Ejercicio 4. (Puntuación máxima: 2 puntos)

Calcular el área del recinto limitado por las curvas $y = x^3 - 3x + 8$, $y = -3x$, y las verticales $x = -3$, $x = 0$.

Solución:



Las curvas $y = x^3 - 3x + 8$, $y = -3x$ *se cortan en* $x = -2$

$A = A_1 + A_2$

$$A = \int_{-3}^{-2} \left(-3x - x^3 + 3x - 8\right) dx + \int_{-2}^{0} \left(x^3 - 3x + 8 + 3x\right) dx =$$

$$= \int_{-3}^{-2} \left(-x^3 - 8\right) dx + \int_{-2}^{0} \left(x^3 + 8\right) dx = \left[-\frac{x^4}{4} - 8x\right]_{-3}^{-2} + \left[\frac{x^4}{4} + 8x\right]_{-2}^{0} =$$

$$\left[-4 + 16 - \left(-\frac{81}{4} + 24\right)\right] + \left[0 - (4 - 16)\right] = \frac{81}{4}$$

Ejercicio 2. (Puntuación máxima: 4 puntos)

Esboza la gráfica de la función: $f(x) = x\ln x$,y calcula el área del recinto plano encerrado por la gráfica de $f(x)$, el eje OX y la recta tangente a $f(x)$ en el punto $x = e$.

Comenzamos representando la función:

$f(x) = x\ln x \;\Rightarrow\; Dom\, f = (0\,,+\infty)$

Cortes con eje OX : $x\ln x = 0 \Rightarrow \ln x = 0 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow (1\,,0)$

$$\lim_{x\to 0^+}(x\cdot\ln x) = \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\ln x}{1/x}\right) = (L'Hôpital) = \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1/x}{-1/x^2}\right) = \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{x^2}{-x}\right) = \lim_{x\to 0^+}(-x) = 0$$

$$\lim_{x\to +\infty}(x\cdot\ln x) = +\infty$$

$f'(x) = \ln x + x\cdot\dfrac{1}{x} \;\Rightarrow\; f'(x) = 1+\ln x \;;\; f'(x) = 0 \;\Rightarrow\; \ln x = -1 \;\Rightarrow x = \dfrac{1}{e}$

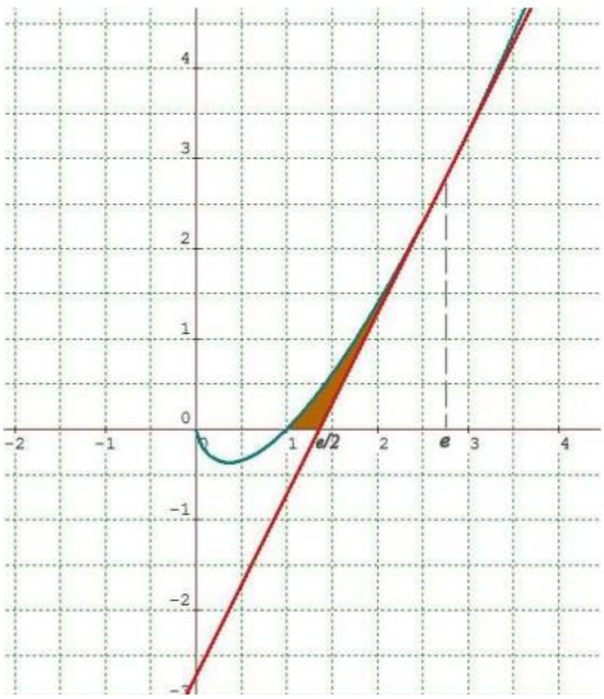
$f''(x) = \dfrac{1}{x} \;;\; f''\left(\dfrac{1}{e}\right) > 0 \;\Rightarrow$ *en el punto* $\left(\dfrac{1}{e}\,,-\dfrac{1}{e}\right)$ *la función tiene un mínimo.*

No hay puntos de inflexión.

Calculamos la recta tangente a $f(x)$ *en el punto* $x = e$

$m = f'(e) = 1+\ln e \;;\; m = 2.$ *Punto de tangencia* $(e,e) \Rightarrow r_{tg} \equiv y - e = 2(x-e) \Rightarrow r_{tg} \equiv y = 2x - e$

Dibujamos la función y la recta tangente y coloreamos la región de la que nos piden el área.



La función $f(x)$ *y la recta* $y = 2x - e$ *se cortan en* $x = e$

Corte de la recta con eje OX : $2x - e = 0 \Rightarrow x = \dfrac{e}{2}$

Entonces el área de la región coloreada será :

$$A = \int_1^e x\ln x\,dx - \int_{e/2}^{e}(2x-e)\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4}\right]_1^e - \left[x^2 - ex\right]_{e/2}^{e} =$$

$$= \left[\frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4}\right] - \left[e^2 - e^2 - \frac{e^2}{4} + \frac{e^2}{2}\right] = \frac{1}{4} \text{ unidades cuadradas}$$

$$\int x\ln x\,dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \int\frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}\,dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \int\frac{x}{2}\,dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4}$$

$$\begin{cases} u = \ln x \;\Rightarrow du = \dfrac{1}{x}dx \\ dv = x\,dx \;\Rightarrow v = \displaystyle\int x\,dx = \dfrac{x^2}{2} \end{cases}$$

Ejercicio 2. (Puntuación máxima: 3 puntos)

Sea $f(x)=\begin{cases}(x-1)^2 & si \;\; x\le 1\\ \ln x & si \;\; x>1\end{cases}$, hallar el área limitada por la gráfica de $f(x)$, y por la recta $y=1$.

Comenzamos representando la gráfica de la función f:

$f(x)$ es una función definida a trozos que es continua.

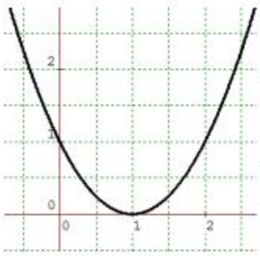
** en el intervalo $(-\infty, 1]$ tenemos la parábola $y=(x-1)^2$, que tiene su vértice en el punto $(1,0)$*

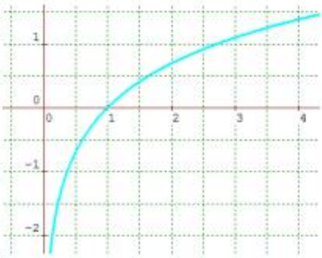
$y'=2(x-1) \Rightarrow y'=0\,;\;\; 2(x-1)=0 \;\Rightarrow\; x=1$

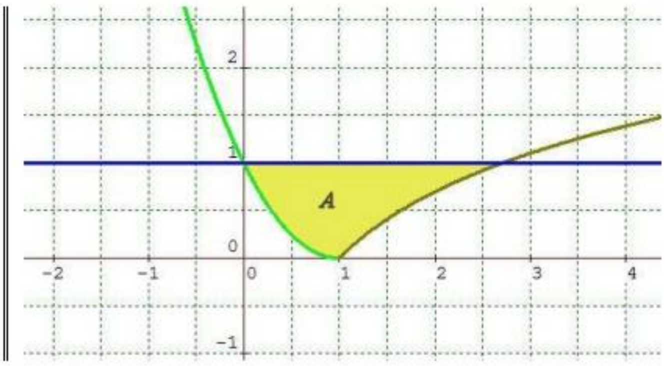
** en el intervalo $(1,+\infty)$ tenemos la función logarítmica $y=\ln x$, que tiene asíntota vertical $x=0$, y pasa por los puntos $(1,0)$ y $(e,1)$*

$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-}(x-1)^2=0=\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+}(\ln x)$

La recta $y=1$ que limita la región es una paralela al eje OX que pasa por $(0,1)$







El área A, de la región pedida será:

$$A=\int_0^e 1\,dx-\int_0^1 (x-1)^2\,dx-\int_1^e \ln x\,dx=[x]_0^e-\left[\frac{(x-1)^3}{3}\right]_0^1-[x\ln x-x]_1^e=$$

$$=[e-0]-\left[0-\left(-\frac{1}{3}\right)\right]-\left[(e-e)-(0-1)\right]=e-\frac{4}{3} \;\; \text{unidades cuadradas}$$

Ejercicio 3. (Puntuación máxima: 2 puntos)

Determina el valor de a, $(a>0)$ para que el área del recinto limitado por la curva $y=x^3-ax$ y el eje OX sea 8 unidades cuadradas.

La curva $y=x^3-ax$ *tiene dominio* $\mathbb{R}$; *corta a los ejes en los puntos* $(0,0)$; $(-\sqrt{a},0)$; $(\sqrt{a},0)$.

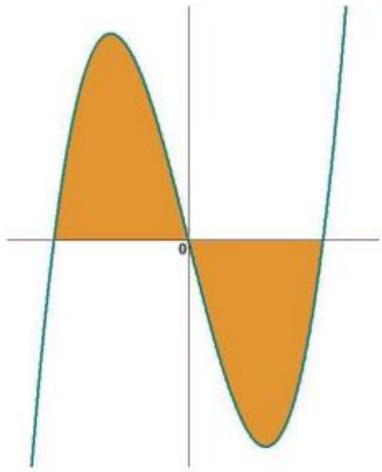
Es simétrica con respecto del origen de coordenadas: $f(-x)=(-x)^3-a(-x)=-x^3+ax=-f(x)$

$y'=3x^2-a$; $y'=0 \Rightarrow x=\pm\sqrt{\frac{a}{3}}$

$y''=6x \Rightarrow$ *en* $x=\sqrt{\frac{a}{3}}$ *hay un mínimo y en* $x=-\sqrt{\frac{a}{3}}$ *hay un máximo.*

$\lim\limits_{x\to-\infty}(x^3-ax)=-\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^3-ax)=+\infty$

Con todo esto ya podemos esbozar la curva, y coloreamos el área que debe valer 8 unidades.



$$8=\int_{-\sqrt{a}}^{0}(x^3-ax)\,dx-\int_{0}^{\sqrt{a}}(x^3-ax)\,dx \Rightarrow \textit{también}$$

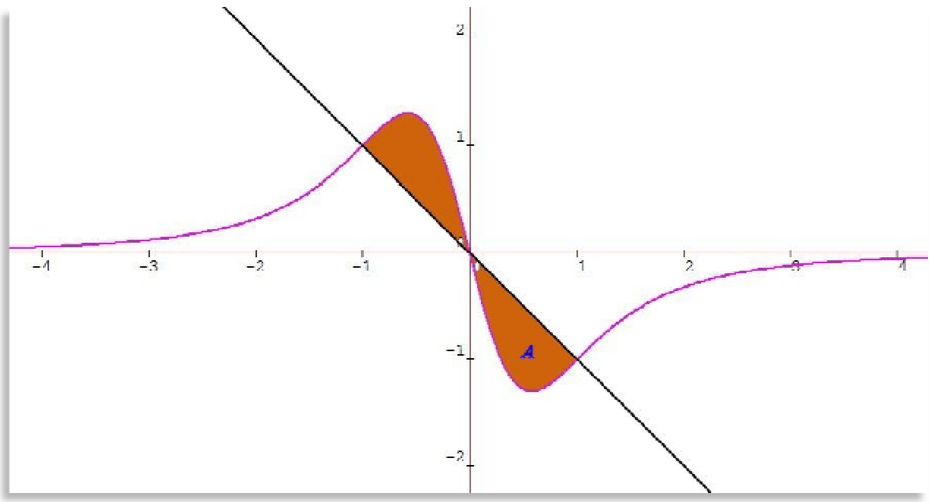
$$\Rightarrow 4=\int_{-\sqrt{a}}^{0}(x^3-ax)\,dx=\left[\frac{x^4}{4}-\frac{ax^2}{2}\right]_{-\sqrt{a}}^{0} \Rightarrow 4=-\frac{a^2}{4}+\frac{a^2}{2}$$

$$16=-a^2+2a^2 \Rightarrow a^2=16 \Rightarrow a=4$$

Ejercicio 4. (Puntuación máxima: 3 puntos)

Determina el área comprendida entre la curvas $f(x)=\dfrac{-4x}{\left(1+x^2\right)^2}$ y $g(x)=-x$. Dibuja la situación representando para ello las funciones dadas.

La función $f(x)$ *tiene dominio todos los números reales, corta a los ejes en el origen de coordenadas, así mismo es simétrica puesto que* $f(-x)=-f(x)$, *tiene una asíntota horizontal en la recta* $y=0$ *puesto que* $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-4x}{\left(1+x^2\right)^2}\triangleq\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-4}{2\left(1+x^2\right)2x}=0$. *Derivando obtenemos que* $f'(x)=\dfrac{12x^2-4}{\left(1+x^2\right)^3}$, *vemos que* $f'(x)=0$ *en los puntos* $x=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ *y* $x=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$. *Derivamos otra vez* $f''(x)=\dfrac{48x-48x^3}{\left(1+x^2\right)^4}$ *y deducimos que en* $x=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ *hay un mínimo ya que* $f''\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)>0$, *del mismo modo en* $x=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ *hay un máximo; además como* $f''(x)=0$ *en* $x=0$, $x=1$, $x=-1$, *hay 3 puntos de inflexión.*



El área pedida será igual a $2A$, *para calcularla debemos encontrar los puntos de corte de las dos funciones.*

$$-x=\frac{-4x}{\left(1+x^2\right)^2}\Rightarrow x\left(1+x^2\right)^2=4x\Rightarrow x\left[\left(1+x^2\right)^2-4\right]=0\Rightarrow\begin{cases}x=0\\1+x^2=2\Rightarrow x=\pm1\\\cancel{1+x^2=-2}\end{cases}$$

$$A=\int_0^1\left(-x-\frac{-4x}{\left(1+x^2\right)^2}\right)dx=-\int_0^1 x\,dx+2\int_0^1\left(1+x^2\right)^{-2}2x\,dx=-\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1+2\left[\frac{-1}{\left(1+x^2\right)}\right]_0^1=\frac{1}{2}$$

Entonces el área pedida es $2A=1$

Ejercicio 1. (Puntuación máxima: 2 puntos)
Las gráficas de $f(x)=x^2$ y $g(x)=cx^3$, siendo $c>0$, se cortan en los puntos $(0,0)$ y en $\left(\frac{1}{c},\frac{1}{c^2}\right)$. Determinar c de manera que la región limitada entre esas gráficas y sobre el intervalo $\left[0,\frac{1}{c}\right]$ tenga área $\frac{2}{3}$.

<u>*Solución:*</u>

$$A=\frac{2}{3}$$

$$A=\int_0^{1/c} x^2dx-\int_0^{1/c} cx^3dx=\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{1/c}-\left[\frac{cx^4}{4}\right]_0^{1/c}=$$

$$=\frac{1}{3c^3}-\frac{c}{4c^4}=\frac{1}{3c^3}-\frac{1}{4c^3}=\frac{1}{12c^3}$$

$$\frac{1}{12c^3}=\frac{2}{3}\Rightarrow c^3=\frac{1}{8}\Rightarrow c=\frac{1}{2}$$